

УДК 624.154.5

DOI: 10.17213/mgvgif/2026-5-487-498

ОБ УСЛОВИЯХ ПРИМЕНЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ТЕОРИЙ ПРИ ГЕОТЕХНИЧЕСКОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ

А. Н. Алехин

Уральский государственный университет путей сообщения, г. Екатеринбург, Россия

Аннотация. *Применение в геотехнических расчетах физически и геометрически нелинейных моделей, отражающих реальный тип деформирования нескальных грунтов, в настоящее время является свершившимся фактом, что позволяет получать не только надежные технические решения для фундаментов и других сооружений, но и значительный, в десятки и сотни миллионов рублей экономический эффект для каждого геотехнического объекта. В статье приведены примеры технически эффективных и экономичных решений фундаментов на базе применения одной из физически нелинейных теорий (моделей), а также некоторые предложения по совершенствованию нормативных положений для стимулирования применения этих теорий в проектной практике.*

Ключевые слова: *грунт, нелинейность, жесткость, характеристики, параметры, определение, метод, полевые способы, внедрение на практике*

ANALYSIS ON THE CONDITIONS OF APPLYING PHYSICALLY NONLINEAR THEORIES IN GEOTECHNICAL DESIGN

A. N. Alekhin

Ural State University of Railway Transport, Yekaterinburg, Russia

Annotation. *The use of physically and geometrically nonlinear models which reflect the real type of non-rock soil deformation for calculations in geotechnical design is now a well-established fact. This allows to obtain not only reliable technical solutions for foundations and different geotechnical structures but also to achieve significant economic benefits ranging from half a million to one million of dollars for every geotechnical structure. The article provides examples of technically effective and cost-efficient foundations solutions based on the application of one of the physically nonlinear theories (models), as well as some suggestions for improving regulatory provisions to encourage the use of these theories physically nonlinear computational models that are adequate for the deformation of non-rock soils in geotechnical design practice.*

Keywords: *soil, nonlinearity, stiffness, characteristics, parameters, definition, method, in-situ tests, practical use*

1. Физико-механическая природа нескальных грунтов требует применения в геотехническом проектировании физически нелинейных физико-математических теорий

В результате естественного происхождения (генезиса) нескальные грунты получают в целом хаотичное строение, следствием чего является сложный характер (вид) их деформирования, который в отличие от линейной (физически линейной) деформации, открытой и впервые исследованной англичанином Робертом Гуком в середине XVII-го века (1640-е годы) [1],

был определен в качестве физически нелинейного, был открыт и впервые исследован советским ученым Александром Боткиным в середине XX-го века (1940-е годы) [2, 3]. Такой вид деформирования требует применения математических теорий (формул) с элементами нелинейности. Именно такой тип формул, гиперболического вида был применен Боткиным и последующими исследователями физически нелинейного деформирования нескальных грунтов [4–6].

В настоящее время феноменологическая нелинейная теория (модель) Боткина для нескальных грунтов является в нашей стране, наиболее верифицированной согласно требованиям СП 22.13330.2016 [7]. В общем случае эта верификация должна состоять из: 1) лабораторных исследований в крупномасштабных лотках; 2) натурных (полевых исследований на небольших моделях фундаментов [6] и, самое главное, в применении на реальных строительных объектах с возможно доступным техническим мониторингом НДС грунтового основания. На рисунке 5 приведены некоторые элементы первых двух этапов верификации теории (модели) Боткина, а на рис.7 и 8 – некоторые результаты заключительного решающего этапа этой верификации — применение верифицируемой теории (модели) в реальном геотехническом проектировании. Скорее всего, в разрезе требований указанного СП теория (модель) Боткина является единственной во всем мире, поскольку в других странах аналогичных требований нет. Однако, требования верификации, следующие из положений СП 22.13330.2016 достаточно обоснованы и полезны, например, в плане требования верификации (не сертификации) и апробации использующего нелинейную теорию (модель) программного обеспечения.

2. Краткая характеристика физически нелинейной модели Боткина, ее параметров и способов их определения

Феноменологическая физически нелинейная модель Боткина сформирована им в соответствии с передовым и в настоящее время методом всех научных исследований, предложенным выдающимся английским ученым Фрэнсисом Бэконом еще в начале XVII века [8]. Кстати, в соответствии с методом Бэкона действовал и его ученик Гук, изучая линейную деформацию материалов, а через 150 лет после исследований Гука другой английский ученый Юнг оформил результаты исследований Гука в виде феноменологической линейной теории для материалов (так называемых конструкционных материалов). Графическая интерпретация этой теории показана на рис. 1.

С другой стороны, экспериментальные механические исследования образцов нескальных грунтов в трехосном приборе типа стабилометр (см. рис. 2) зафиксировали значительно более сложный вид деформации.

На рис. 3 приведена одна из двух основных частей паспорта испытания нескального глинистого грунта в стабилометре отражает девиаторное (формоизменяющее — сдвиговое) нагружение и численно характеризуется модулем формоизменения-сдвига G (параметр μ на рис.4 определяет соотношение главных напряжений — вид напряженного состояния).

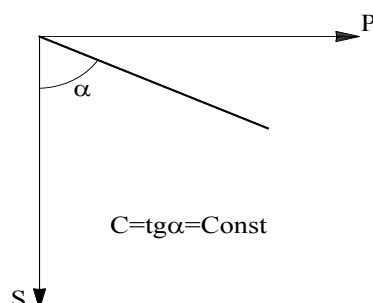


Рис. 1. Линейная зависимость между давлением P (физически действительный и осязаемый аналог условной согласно теории сплошной среды Коши величины напряжения σ , в дальнейшем принятой в теоретическом анализе) и величиной перемещения S (в дальнейшем анализе принятой сначала в виде относительного перемещения, а затем в теоретическом анализе в виде условной согласно теории сплошной среды Коши величины относительной деформации ε)

Другая основная часть означенного выше паспорта испытания отражает объемное нагружение и численно характеризуется модулем объемной деформации K . Таким образом, именно испытания (исследования) Боткиным нескальных грунтов в стабилометре позволили впервые экспериментально вскрыть и разделить, в том числе в рамках тензорного исчисления две составляющие общей деформации согласно положениям теории Коши о сплошной среде.

Аналогичные графики имеют место в случае испытания суглинков, супесей и всех песков. Обобщенная диаграмма результатов испытаний в стабилометре перечисленных грунтов в инвариантах тензоров напряжений и деформаций приведена на рис. 4. Для сравнения принципиального различия двух существующих в природе двух видов деформации: физически линейной для материалов (Вид I) и физически нелинейной для нескальных грунтов (Вид II) в этих же координатах на рис. 4 приведена также гипотетическая диаграмма деформации материалов: гипотетическая, поскольку реально такую диаграмму получить для материалов невозможно, также, как и для скальных пород вследствие их высокой жесткости. Но, тем не менее, эта диаграмма, полученная из известных и механически достоверных соотношений Генки с характеристиками жесткости ($E = \text{const}$ и $\nu = \text{const}$), является также достоверной, по крайней мере, с точки зрения различия видов деформации двух разновидностей твердых сред: 1) технологически жестко созданных материалов и 2) фактически хаотично природно сформировав-

шихся нескальных грунтов. Что касается скальных пород, то по механическим свойствам они фактически примыкают к материалам, поскольку природные процессы их сформировавшие по мощности и по воздействию близки к жестким технологическим воздействиям, только более масштабные по объему. Еще одна разновидность грунтов, механические свойства которой, возможно, до конца не изучены, представлена крупнообломочными грунтами (и не только мелкообломочными дресвяными и гравелистыми) по результатам исследований Зарецкого в крупномасштабном стабилометре по механическим свойствам феноменологически близка к своим мелкообломочным разновидностям.

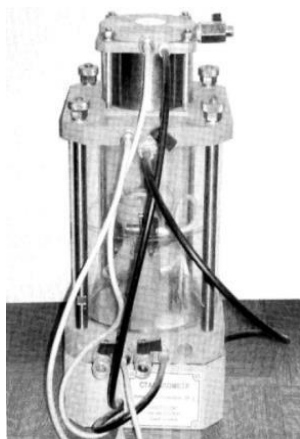


Рис. 2. Фото стабилометра

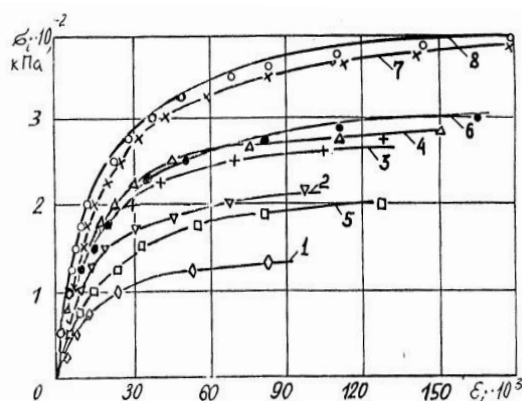


Рис. 3. Сдвиговые (девиаторные ε_i) деформации при различном обжатии образца величиной σ и различных значениях параметра μ :

кривые 1, 3, 5, 7 при $\mu = +1$; кривые 2, 4, 6, 8 при $\mu = -1$

На рис. 4 показана для сравнения графическая интерпретация двух существующих в природе видов деформации; под графиками приведены наиболее удобные для каждого вида деформации характеристики жесткости, а также соотношения между ними, полученные в рамках соотношений Генки между относительными деформациями и напряжениями.

Соотношения Генки нередко называют обобщенным законом Гука-Юнга, поскольку они получены обобщением зависимости, изображенной на рисунке 1 следующим образом:

$$\sigma_{ij} - 1/3 \delta_{ij} \delta_{nk} \sigma_{nk} = 2G(\varepsilon_{ij} - 1/3 \delta_{ij} \delta_{nk} \varepsilon_{nk});$$

σ_{ij} , ε_{ij} — компоненты тензоров напряжений и деформаций;

$$\delta_{nk} \sigma_{nk} = K \delta_{nk} \varepsilon_{nk}; \quad i, j, n, k = x, y, z; \quad (1)$$

δ_{ij} — символ Кронекера;

K — модуль всесторонней деформации;

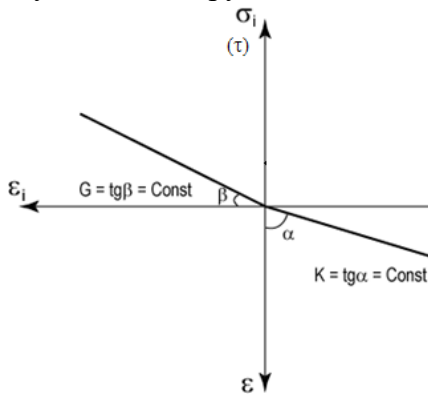
G — модуль формоизменения-сдвига;

σ_i — 2-й инвариант девиатора напряжений;

σ — 1-й инвариант тензора напряжений.

I Физически линейная деформация

Неаутентичная грунтам

**II. Физически нелинейная деформация**

Аутентичная грунтам

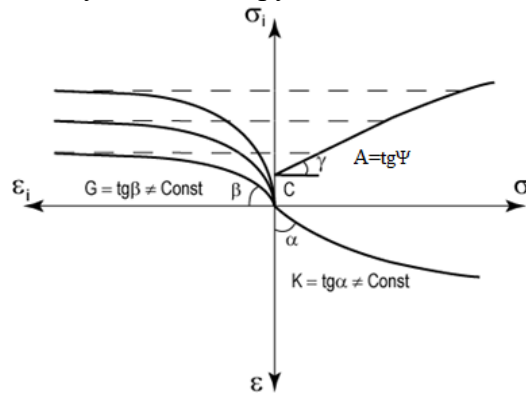


Рис. 4. Графическая интерпретация двух существующих в природе видов деформации и удобные для них характеристики жесткости:

для I: $E = \text{const}$; $\nu = \text{const} \rightarrow$ следствия: $K = E/(1-2\nu) = \text{const}$; $G = 0,5E/(1+\nu) = \text{const}$;

для II: $K = \sigma^{1-\alpha}/A_0 \neq \text{const}$; $G = (\sigma_u - \sigma_i)/B (A\sigma + C)/(B + \varepsilon_i) \neq \text{const}$ ($\sigma_u = A\sigma + C$ – условие прочности нескального грунта согласно Боткину, принявшему октаэдрическое условие прочности для твердой среды) $\rightarrow$ следствие: $E = 3KG/(K + G) \neq \text{const}$;

$\nu = 0,5(K-2G)/(K+G) \neq \text{const}$ жесткости ;

для I: $E = \text{const}$; $\nu = \text{const} \rightarrow$ следствия: $K = E/(1-2\nu) = \text{const}$; $G = 0,5E/(1+\nu) = \text{const}$;

для II: $K = \sigma^{1-\alpha}/A_0 \neq \text{const}$; $G = (\sigma_u - \sigma_i)/B (A\sigma + C)/(B + \varepsilon_i) \neq \text{const}$ ($\sigma_u = A\sigma + C$ – условие прочности нескального грунта согласно Боткину, принявшему октаэдрическое условие прочности для твердой среды) $\rightarrow$ следствие: $E = 3KG/(K + G) \neq \text{const}$;

$\nu = 0,5(K-2G)/(K+G) \neq \text{const}$

Таким образом, принципиальным отличием двух, существующих в природе видов деформации является их различие в физическом существе, в том числе принципиальное различие их числовых характеристик, чем и диктуется в свою очередь различие в их названиях: у физически линейной деформации значения характеристик не изменяются в процессе деформации, реализуясь в линейном виде соответствующих графиков (см. рис. 4), в то время, как у физически нелинейной деформации значения характеристик изменяются в процессе деформации, реализуясь в криволинейности соответствующих графиков (см. рис. 4). После описания криволинейных графиков, по возможности простыми зависимостями, что и сделал, обладавший хорошей математической подготовкой, Боткин, создав, по-сути, первую физически нелинейную теорию (модель) для нескальных грунтов, была выполнена ее верификация не только в экспериментальном, но и в математическом плане (см. рис. 5б). При этом Боткин впервые в отличие от Юнга, вслед за Коши разделил общую деформацию на объемную деформацию и деформацию формоизменения следующими соотношениями:

Модулем объемной деформации

$$K = \sigma^{1-\alpha}/A_0. \quad (2a)$$

Модулем сдвига

$$G = (A\sigma + C)/(B + \varepsilon_i). \quad (2б)$$

Здесь величины σ и ε_i являются характеристиками напряженно-деформированного состояния грунта, вычисляемые при расчете грунтового основания, а величины A_0 , α , A , B , C служат числовыми параметрами формул (2а) и (2б), определяющими особенности деформирования различных грунтов. Из-за наличия в формулах (2а) и (2б) величин σ и ε_i следует, что жесткостные характеристики K и G зависят от конкретного НДС. Но, как следует из приведенных ниже соотношений Боткина-Малышева:

$$A = \frac{\sqrt{2(3+\mu^2) \sin \varphi}}{3+\mu \sin \varphi}; C = \frac{\sqrt{2(3+\mu^2) \cos \varphi}}{3+\mu \sin \varphi} c, \quad (3)$$

где φ — угол внутреннего трения грунта, °; c — удельное сцепление грунта, кПа; μ — параметр Лоде-Надаи вида напряженно-деформированного состояния, зависящий от главных напряжений и деформаций, а значит и от конкретного НДС.

Таким образом, величины A_0 , α , A , B , C зависят не только от физических свойств нескального грунта, но и от конкретного НДС на фактическом месте (in-situ) возведения сооружения, причем для сохранения исходного НДС, также вносящего свой вклад в значения параметров A_0 , α , A , B , C .

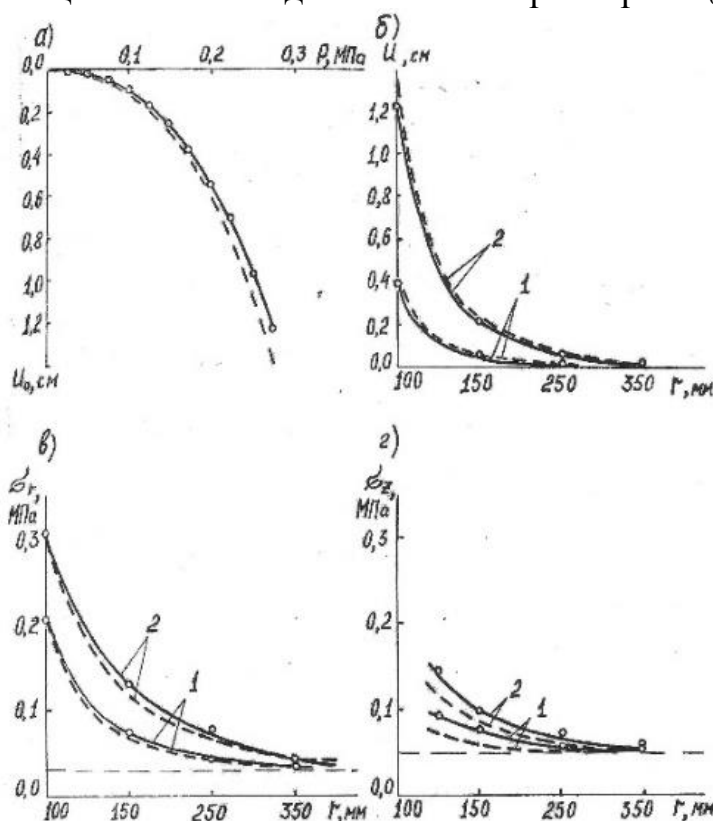


Рис. 5а. Результаты Христофорова и Задворнева (НИИОСП, 1978 [9]) по верификации модели Боткина в лабораторном крупномасштабном лотке на примере песка: сопоставление расчетных (пунктир) по данным испытания песка в стабилометре и экспериментальных в лотковых испытаниях (сплошные линии) графиков напряжений и перемещений (ОФ и МГ, 1978, № 6)

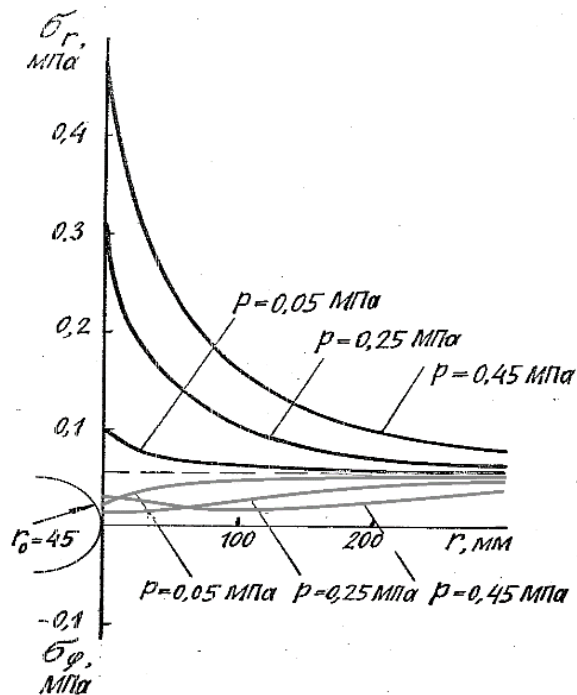


Рис. 56. Результаты Алехина А.Н. и Алехина Ал.А [10] по расчетной верификации на примере песка модели Боткина: окружные расчетные усилия (напряжения) σ_ϕ в песке при любом давлении p в камере pressiометра согласно расчетам по теории (модели) Боткина автоматически равны нулю, чего не происходит для других моделей

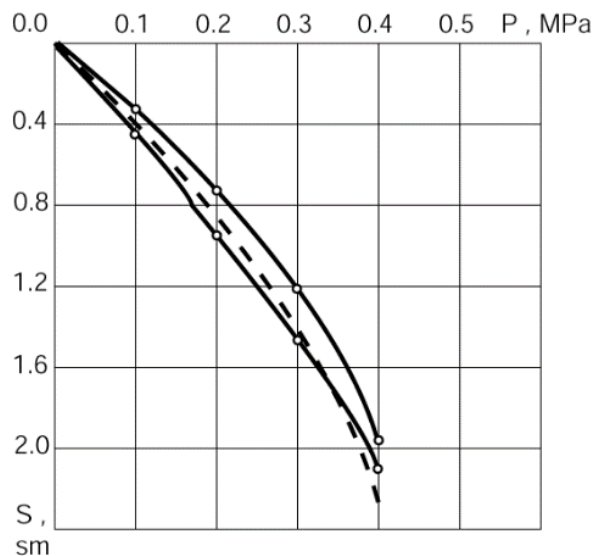


Рис. 57. Результаты Алехина А.Н., Алехина Ал.А. (УрГУПС, Екатеринбург. и Мариупольского Л.Г. (НИИОСП, Москва) [11] по верификации на примере песка модели Боткина: сопоставление расчетных осадок (пунктирная линия) грунтового массива в крупномасштабном лотке и параллельных испытаний в аналогичном лотке (сплошные линии)

Этот важный эксперимент позволил проверить статистическую надежность модели Боткина и возможность ее применения различными организациями.

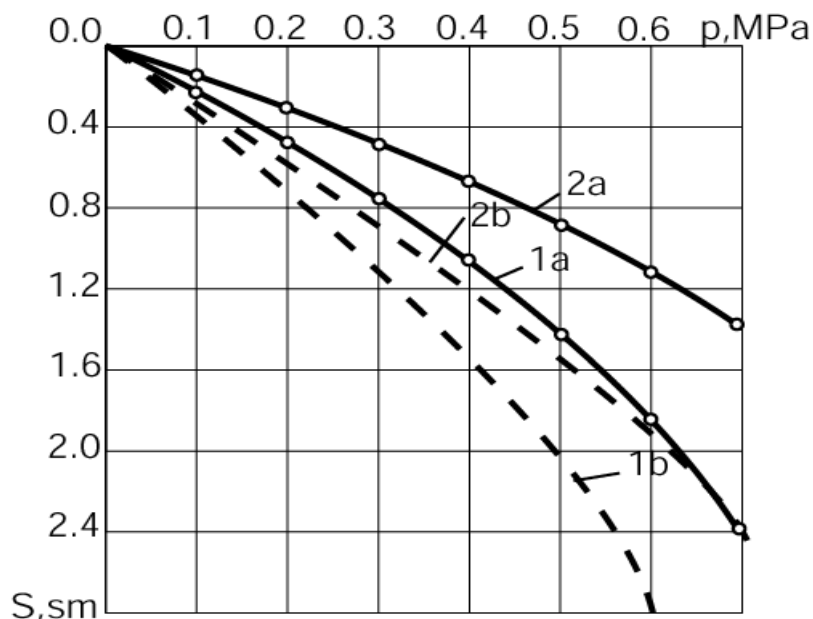


Рис.5г. Результаты Алехина А.Н. Алехина Ал.А. и Алехина Ан.А. (УПИ, Екатеринбург) по верификации примере мелкомасштабной модели фундамента в виде штампа площадью 5000 см^2 на реальном пылевато-глинистом грунтовом основании:

1 — на глубине 3,0 м; 2 — на глубине 5,0 м: пунктиром изображены расчетные графики на основании определения параметров физически нелинейной модели Боткина, определенных в стабилометре на образцах ненарушенной структуры, сплошными линиями графики при реальном нагружении основания [12]

Этот эксперимент показал, что различие расчетных и фактических данных составляет более 100 %, что подтвердило физически нелинейный статус нескальных грунтов, не позволяющий использовать данные лабораторных (даже стабилометрических испытаний образцов ненарушенной структуры) для использования их в реальных проектных целях. Одновременно была проверена способность физически нелинейной модели Боткина через ее элементы формул формулах 2а и 2б. σ^{1-a} / A_0 и $A\sigma$ отражать влияние глубины в грунте (здесь σ — обжатие грунта, увеличивающееся с глубиной). Таким образом, надежные и экономичные проектные решения для геотехнических сооружений могут быть получены только при минимальном отклонении расчетных и фактических деформаций грунтовых массивов, а это может быть получено только при полевых (in-situ) испытаниях грунтов на месте возведения сооружения. При этом обработка результатов испытаний должна выполняться по специальной методике, разработанной в Екатеринбурге (УрГУПС) и с использованием устройств, минимально нарушающих исходное состояние грунта и обеспечивающих максимальную точность измерений. К таким устройствам относятся радиальные прессиометры диаметром 9 см с точностью измерения 2 мм и плоские штампы площадью 600 см^2 и точностью измерения 5 мм. Расчетная схема одного из устройств (прессиометра) приведена на рис. 6.

Специальная техника установки прессиометра в скважине позволяет максимально сохранить исходное до нагружения напряженное состояние грунта. Физическая нелинейность грунта требует выполнять обработку результатов испытаний в рамках физически нелинейной грунтовой модели (в данном случае — модели Боткина), поскольку другая методика неизбежно приведет к недостоверному результату вследствие неучета реальных особенностей деформирования нескальных грунтов.

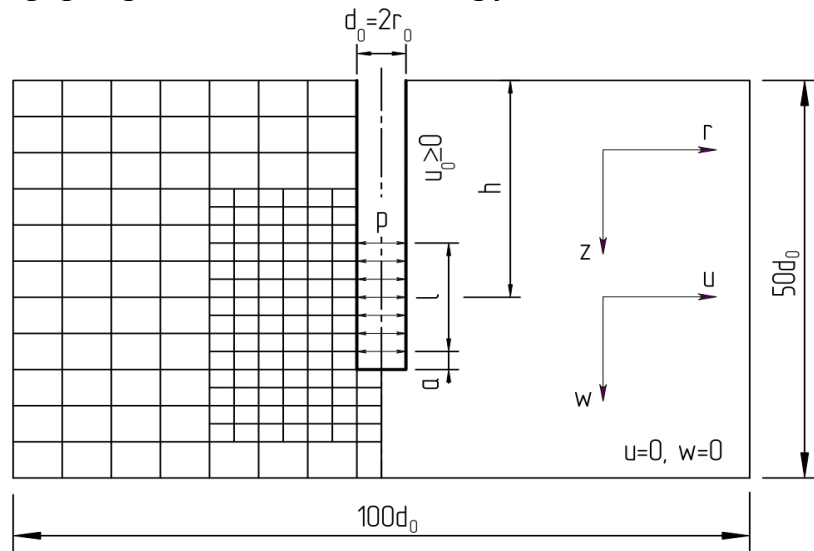


Рис. 6. Расчетная схема радиального прессиометра в скважине:

u и w — горизонтальное и вертикальное перемещения; l — длина камеры прессиометра; d_0 — начальный диаметр камеры прессиометра; h — расстояние от поверхности грунта до середины камеры прессиометра

Вывод формулы для определения значения параметра модели Боткина B , как наиболее важного, определяющего в основном физическую нелинейность деформации формоизменения-сдвига, вызывающую, как известно, разрушение любой твердой среды, нагляднее всего пояснить на примере результатов испытания грунта плоским штампом (определение его из прессиометрического испытания требует небольшого и вполне понятного, но не тривиального теоретического дополнения, о котором будет сообщено после вывода формулы для штампа): вывод формулы для параметра B основан на сопоставлении формул для осадок S в реальном испытании S_a и смоделированной S_m с использованием приближенных значений параметров модели Боткина A_{0m} , α_m , A_m , B_m , назначенных, например, из результатов исследований на другой строительной площадке. Расчетная осадка штампа определяется определенным интегралом относительной вертикальной деформации ε_z в пределах вертикальной толщины H сжимаемой зоны основания $S = \int_0^H \varepsilon_z dz$. Учитывая жесткость металлического с ребрами жесткости штампа, как следствие равенство нулю других составляющих относительных деформаций под центром круглого штампа, величину ε_z под центром штампа

можно заменить величиной второго инварианта девиатора деформаций (интенсивности деформаций) $\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon_z = \sqrt{3/4}\varepsilon_i = \sqrt{0,75}\varepsilon_i$, откуда осадка $S = \sqrt{0,75} \int_0^H \varepsilon_i dz$. В то же время величина ε_i входит в соотношение Боткина для модуля сдвига G , что позволяет выразить ее через параметр B $\varepsilon_i = (Bx)/(1-x)$ после введения обозначения $x = \sigma_i/\sigma_u$ для степени достижения обобщенным сдвиговым усилием σ_i его предельной по Боткину-Мизесу величины $\sigma_u = A\sigma + C$ (σ – объемные усилия в грунте, A и C – параметры формулы Боткина для модуля сдвига G). Вводя далее обозначение $Y = Bx/(1-x)$, получим формулу для интенсивности деформаций $\varepsilon_i = BY$, а также формулу для осадки штампа $S = \sqrt{0,75} \int_0^H \varepsilon_i dz = \sqrt{3}/2 \int_0^H BY dz = 0,87 \times B \int_0^H Y dz$. Если предположить, что реальная осадка штампа S_a является осадкой штампа на другом грунте с параметром $B = B_a$, то $S_a = 0,87 \times B_a \int_0^H Y dz$, а $S_m = 0,87 \times B_m \int_0^H Y dz$ (B_m — величина параметра B , использованная при моделировании осадки, а B_a — фактическая величина параметра B в грунте основания). После масштабирования переменной интегрирования z (глубина в грунте от подошвы штампа) величиной глубины сжимаемой зоны H (естественно, величины H в реальности и в моделировании будут разными из-за разницы реальных значений параметров модели Боткина и их значений, использованных при моделировании) $z' = z/H$, получим определенные интегралы с пределами интегрирования 0 и 1: $S_a = 0,87 \times B_a \int_0^1 Y dz'$ и $S_m = 0,87 \times B_m \int_0^1 Y dz'$ (Y — подынтегральная функция — распределение относительной деформации в пределах сжимаемой зоны — естественно, эта функция). В результате применения к определенному интегралу $\int_0^1 Y dz$ теоремы о среднем формулы для величин осадок получают вид: $S_a = 0,87 \times B_a$ и $S_m = 0,87 \times B_m$. Отношение $S_a/S_m = B_a/B$. Тогда истинное значение параметра

$$B_a = B_m \times S_a/S_m \quad (4)$$

При учете статистического разброса измеряемой величины S_a формула (4) имеет вид:

$$B_f = B_m \times \Sigma(S_{fi})^2 / \Sigma(S_{mi})^2 \quad (5)$$

Остальные параметры определяются самым простым способом минимизации отклонения расчетных (смоделированных S_m и фактических S_a деформаций).

Приведенные в статье положения позволили применить физически нелинейную теорию (модель) Боткина при проектировании нескольких объектов, указанных ниже.



Рис.7. Высокая плотность застройки: расстояние между жилой вставкой и соседними зданиями 2,5 м

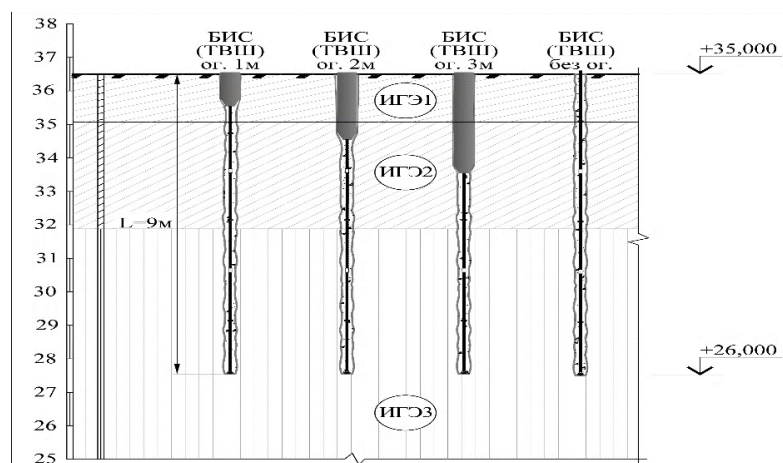


Рис. 8. Пример эффективности теории (модели) Боткина: высотные 33-х этажные жилые дома на плитных фундаментах, на элювиальных суглинках различие расчетных и фактических осадок 1 см, экономический эффект на каждом фундаменте 50 млн. рублей

Список источников

1. Закон Гука. В поисках формы. Наука. Величайшие теории. – Enrique Gracián Rodríguez 2013 © RBA Coleccionables S.A., 2014 © ООО © «Де Агостини», 2014 – 2015. – 167 с.
2. Боткин, А. И. Исследование напряжённого состояния в сыпучих и связных грунтах / А. И. Боткин // Известия НИИ гидротехники. Том XXIV. М.–Л., 1939. – С. 153-172.

3. Боткин, А. И. О прочности сыпучих и хрупких материалов / А. И. Боткин // Известия НИИ гидротехники. Том XXVI. М., 1940. – С. 205-236.
4. Ломизе, Г. М. О закономерностях деформируемости дисперсных грунтов. – В кн.: Научные доклады высшей школы / Г. М. Ломизе // Строительство, 1959. – № 2. – С. 121-128.
5. Ломизе Г. М. Исследование закономерностей деформируемости и прочности грунтов при пространственном напряженном состоянии / Г. М. Ломизе, А. Л. Крыжановский, Э. И. Воронцов // В кн.: Труды к VII Международному конгрессу по механике грунтов и фундаментостроению. – М.: Стройиздат, 1969. – С. 32-41.
6. Алехин, А. Н. Нелинейный анализ напряженно-деформированного состояния грунтовых массивов при статическом нагружении. дис. ... канд. техн. наук / А. Н. Алехин. – Свердловск: УПИ, 1982. – 118 с.
7. СП 22.13330.2016 Основания зданий и сооружений. Актуализированная редакция СНиП 2-02-01-83*. Минрегион России. - М., 2011. – 166 с.
8. Быховский, Б. Э. Людвиг Фейербах / Б Э. Быховский. – М.: «Мысль», 1967. – 239 с.
9. Христофоров, В. С. Напряженно-деформированное состояние грунта с нелинейными характеристиками при осесимметричной плоской деформации / В. С. Христофоров, Г. А. Задворнев // Основания, фундаменты и механика грунтов, 1978. – № 6. – С. 19-21.
10. Алехин, А. Н. Краткая характеристика моделей грунта / А. Н. Алехин // Академический вестник УралНИИпроект РААСН №1. – Екатеринбург: УралНИИпроект, 2011. – С. 75-80.
11. . Исследование особенностей деформирования грунтов при различных траекториях их нагружения для разработки методики трехосных испытаний грунтов / А. Н. Алехин, Ю. Р. Оржеховский, Л. Г. Мариупольский [и др.] // Отчет о НИР. – № ГР 0186011927. – Свердловск, УЭМИИТ, 1986. – 67 с.
12. Алехин А. Н. Технический отчет по дополнительным инженерно-геологическим изысканиям и проект плитного фундамента на объекте: «Жилая застройка в границах улиц Блюхера – Данилы Зверева – Советской в Кировском районе г. Екатеринбурга. Жилой дом №5» ООО «ТЕХКОН»/ А. Н.Алехин, Ан. А. Алехин, Ал. Н. Алехин. – Екатеринбург, 2019. – 300 с.

© Алехин А. Н., 2026